



## Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Județeană și a Municipiului București, 10 Martie 2012

### SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE – CLASA a V-a

**Problema 1.** Aflați numerele de trei cifre care se micșorează de nouă ori dacă li se șterge cifra din mijloc.

**Soluție.** Fie  $\overline{abc}$  un număr cu proprietatea din enunț. Avem  $\overline{abc} = 9 \cdot \overline{ac}$ .  
..... 1p

Se obține  $10(a + b) = 8c$ .  
..... 2p

Convine doar  $c = 5$ .  
..... 2p

Rezultă  $a + b = 4$ , deci numerele căutate sunt 135, 225, 315 și 405.  
..... 2p

#### Problema 2.

a) Care puteri ale numărului 2 se scriu cu patru cifre (în baza 10)?

b) Fie  $n$  număr natural nenul. Arătați că există cel puțin trei puteri a lui 2 care se scriu cu  $n$  cifre (în baza 10).

**Soluție.** a) Puterile sunt 1024, 2048, 4096, 8192.  
..... 3p

b) Arătăm că există o putere a lui 2 cu  $n$  cifre. În caz contrar, există  $p \in \mathbb{N}$  cu  $2^p < 10^{n-1} < 10^n < 2^{p+1}$ . Din ultima inegalitate rezultă  $5 \cdot 10^{n-1} < 2^n$ , ceea ce conduce la  $5 \cdot 10^{n-1} < 2^p < 10^{n-1}$ , fals.  
..... 1p

Fie acum  $a = 2^m$  prima putere a lui 2 scrisă cu  $n$  cifre. Observăm că prima cifră a numărului  $a$  este 1, altfel  $a > 2 \cdot 10^{n-1}$  și  $\frac{a}{2} = 2^{m-1} > 10^{n-1}$  este o putere mai mică a lui 2 scrisă tot cu  $n$  cifre.  
..... 2p

Prin urmare  $a < 2 \cdot 10^{n-1}$ ,  $2a < 4 \cdot 10^{n-1}$  și  $4a < 8 \cdot 10^{n-1} < 10^n$ , adică  $2^m$ ,  $2^{m+1}$  și  $2^{m+2}$  sunt trei puteri ale lui 2 cu  $n$  cifre.  
..... 1p

**Problema 3.** Se consideră 51 de numere naturale pare diferite două câte două. Demonstrați că putem alege două dintre acestea cu proprietatea că produsul dintre suma și diferența lor este divizibil cu 400.

**Soluție.** Prin împărțirea unui număr par la 100 se poate obține unul din următoarele 50 de resturi: 0, 2, 4, ..., 98

..... **1p**

Din cele 51 de numere, două dau același rest la împărțirea prin 100; fie acestea  $a$  și  $b$

..... **2p**

Considerând  $a = 100k + 2r$  și  $b = 100p + 2r$ , unde  $k, p \in \mathbb{N}$ ,  $k > p$ , și  $r \in \{0, 1, 2, \dots, 49\}$ , obținem  $a - b = 100(k - p)$  și  $a + b = 4(25k + 25p + r)$ , de unde rezultă că  $(a - b)(a + b)$  este divizibil cu 400

..... **4p**

**Problema 4.** Într-o cutie se află 36 de bile numerotate de la 1 la 36. Ion încearcă să elimine bilele din cutie, în etape. Fiecare etapă constă în următoarea succesiune de operații:

- Ion extrage la întâmplare patru bile din urnă.
  - Ion elimină câte două bile dintre cele patru dacă diferența numerelor înscrise pe acestea se divide cu 3.
  - Ion reintroduce în urnă bilele care nu au fost eliminate.
- a) Arătați că, în fiecare etapă, Ion poate elimina cel puțin două bile.
- b) Arătați că, dacă în cutie rămân numai patru bile, atunci Ion le poate elimina pe toate.

**Soluție.** a) Resturile la împărțirea cu 3 sunt 0, 1 și 2. Date fiind patru numere naturale, două dintre acestea vor avea același rest la împărțirea cu 3, deci vor avea diferența divizibilă cu 3. Cu alte cuvinte, Ion elimină cel puțin două bile.

..... **3p**

b) Grupăm bilele în trei mulțimi, în fiecare mulțime fiind bilele având numerele cu același rest la împărțirea cu 3 –  $\{3, 6, \dots, 36\}$ ,  $\{1, 4, \dots, 34\}$ ,  $\{2, 5, \dots, 35\}$ .

..... **1p**

La fiecare etapă se elimină două sau patru bile având numerele din aceeași mulțime.

..... **1p**

Cele patru rămase pot fi toate din aceeași mulțime sau două perechi din mulțimi diferite.

..... **1p**

Ion grupează ultimele patru bile extrase în câte două perechi de bile cu numere din aceeași mulțime, eliminându-le astfel pe toate.

..... **1p**